

**Autour d'exo planètes**

1<sup>ère</sup> partie :

**Quelques caractéristiques orbitales**

1.1 terre , Jupiter , mars ( soleil et lune sont inacceptables )

1.2 dans \*R (Galiléen car système isolé) le TMC en G appliqué à la particule fictive F :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{GF} \times -G \frac{m_E m_P}{EP^3} \vec{EP} = \vec{EP} \times -G \frac{m_E m_P}{EP^3} \vec{EP} = \vec{0}$$

donc  $\vec{\sigma}_G = \vec{GF} \times \mu \vec{v} = \vec{ct\hat{e}}$  soit  $\vec{GF} \cdot \vec{ct\hat{e}} = ax + by + cz = 0$  c'est l'équation cartésienne du plan passant par l'origine G et  $\perp$  à  $\vec{\sigma}_G$

1.3  $GF = R$

1.3.1 on a : 
$$\begin{cases} m_E \vec{GE} + m_P \vec{GP} = \vec{0} \\ \vec{GF} = \vec{EP} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{GE} = -\frac{m_P}{m_E + m_P} \vec{GF} \\ \vec{GP} = \frac{m_E}{m_E + m_P} \vec{GF} \end{cases}$$

les trajectoires de F , E et P sont homothétique dans \*R donc les trajectoires de E et P seront aussi circulaires

1.3.2 dans la base de Freinet le TRC s'écrit :  $\mu \frac{v^2}{R} (-\vec{e}_r) = -G \frac{m_E m_P}{R^2} \vec{e}_r$  or  $v = \frac{2\pi R}{T}$  donc

$$R = \left[ \frac{G(m_E + m_P)T^2}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

1.3.3 soit :  $GE = \frac{m_P}{m_E + m_P} R = \frac{m_P}{(m_E + m_P)^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{GT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$  et  $GP = \frac{m_E}{m_E + m_P} R = \frac{m_E}{(m_E + m_P)^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{GT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

1.4

1.4.1 on a la relation du barycentre  $m_E \vec{GE} + m_P \vec{GP} = \vec{0}$  , par dérivation par rapport au temps dans \*R il vient  $m_E \vec{v}_E = -m_P \vec{v}_P$  donc  $m_E v_E = m_P v_P$

1.4.2 
$$v_E = \frac{2\pi GE}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}}$$

$$v_P = \frac{2\pi GP}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}}$$

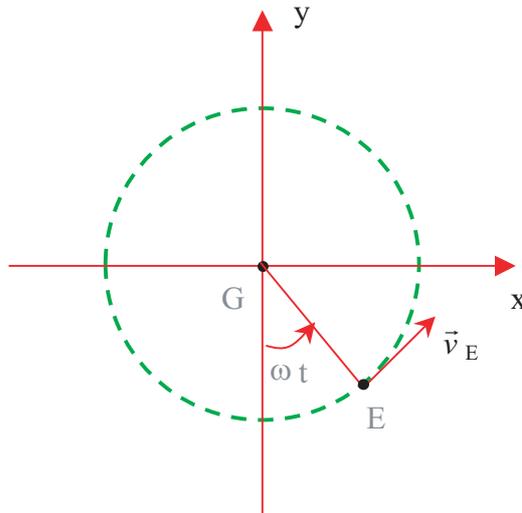
si  $m_p \ll m_E$  alors  $v_E \approx 0$  et  $v_P \approx \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E G}{T}}$

1.4.3 dans ce cas  $G \equiv E$  et  $(F \equiv P)$  donc  $v_P = \frac{2\pi EP}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_E G}{T}}$  soit  $m_E = \frac{4\pi^2 EP^3}{GT^2} = 2.8 \cdot 10^{30} kg$

1.5

1.5.1 
$$\vec{v}_E(t) = v_E \left[ \cos \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_y \right]$$

or  $v_{//} = \vec{v}_E \cdot \vec{u} = v_E \left[ \cos \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi t}{T} \vec{u}_y \right] \cdot [\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z] = v_E \sin \theta \cos \frac{2\pi t}{T}$



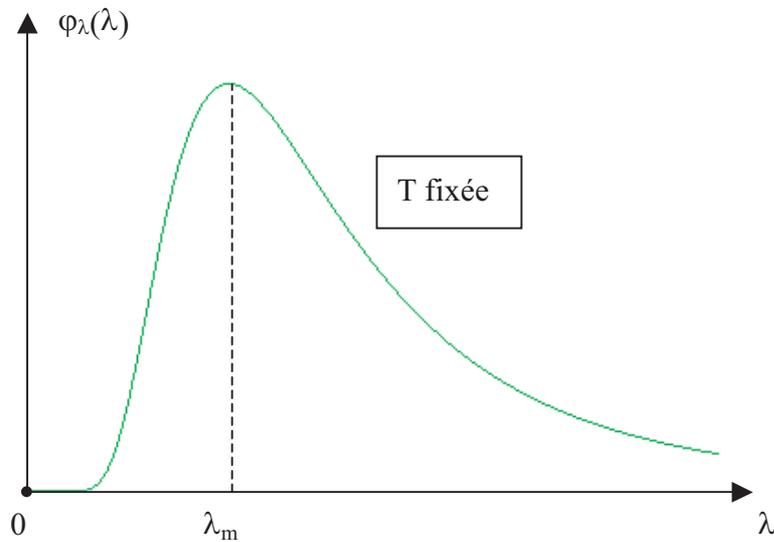
1.5.2 on a  $v_{//max} = v_E \sin \theta$  et  $v_E = \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{(m_E + m_P)^2 T}} \approx \sqrt[3]{\frac{2\pi m_P^3 G}{m_E^2 T}}$  d'où  $m_p = \frac{v_{//max}}{\sin \theta} \sqrt[3]{\frac{m_E^2 T}{2\pi G}}$

1.5.3 les mesures étant sensibles à  $v_{//}$  donc la position favorable sera  $\sin \theta = 1$  donc  $\theta = \frac{\pi}{2}$

2<sup>ème</sup> partie :  
Visibilité de la planète

2.1 Caractéristiques générales

2.1.1 :



2.1.2 posons  $x = \frac{hc_0}{\lambda k_B T}$ , le maximum de  $\varphi_\lambda$  est donné par

$$\frac{d\varphi_\lambda(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\varphi_\lambda}{dx} \frac{-hc_0}{\lambda^2 k_B T} = 0 \iff \frac{d}{dx} \left( \frac{x^5}{e^x - 1} \right) \Big|_{x_m} = 0 \iff 5e^{x_m} - 5 - x_m e^{x_m} = 0$$

donc  $\lambda_m T = \frac{hc_0}{k_B x_m}$  soit  $\gamma = \frac{1}{x_m}$

2.1.3  $\lambda_\Theta T_\Theta = 3000 \mu m K \implies \lambda_\Theta = 0.5 \mu m$  couleur jaune en accord avec l'observation

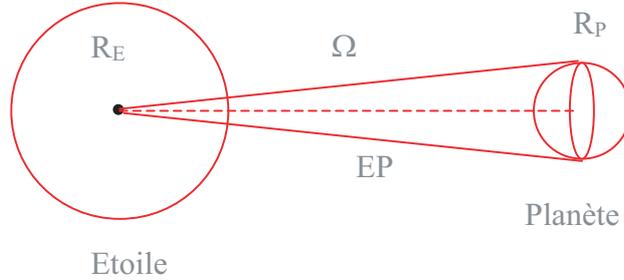
2.1.4  $\varphi = \int_0^\infty \varphi_\lambda d\lambda$  on pose  $x = \frac{hc_0}{\lambda k_B T}$  il vient

$$\varphi = \int_\infty^0 \frac{2\pi hc_0^2}{\left(\frac{hc_0}{k_B T}\right)^5} \frac{x^5}{e^x - 1} \frac{-hc_0 dx}{k_B T x^2} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c_0^2} T^4$$

obéissant à la loi de Stefan  $\varphi = \sigma T^4$  avec  $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c_0^2}$

## 2.2 Température d'équilibre de la planète

2.2.1 le flux incident sur la planète venant de l'étoile s'écrit  $\Phi_P = \frac{\Omega}{4\pi} \Phi_E = \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E$



2.2.2 on a  $\Phi_P = \underbrace{\Phi_t}_{\Phi_r} + \Phi_r + \Phi_a = \Phi_r + \Phi_a$  et  $\Phi_r = A\Phi_P$  soit  $\Phi_r = A \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E$  et  $\Phi_a = (1 - A) \frac{R_P^2}{4EP^2} \Phi_E$

2.2.3 loi de Stefan  $\Phi_e = \sigma T_P^4 4\pi R_P^2$

2.2.4 à l'équilibre radiatif  $\Phi_e = \Phi_a \implies T_P = (1 - A)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R_E}{2EP}\right)^{\frac{1}{2}} T_E$

2.2.5 Application numérique

2.2.5.1  $T_{terre} = 261 K = -11^\circ C$  trop froid, il faut tenir compte de l'effet de serre!

2.2.5.2  $T_P = 213 K = -59^\circ C$  insupportable par les être-vivant

2.2.5.3 loi de Wien  $\lambda_P = 14 \mu m$  domaine infra-rouge!

## 2.3 Condition photométrique d'observation

2.3.1 le rapport des puissances émises dans le domaine  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  s'écrit

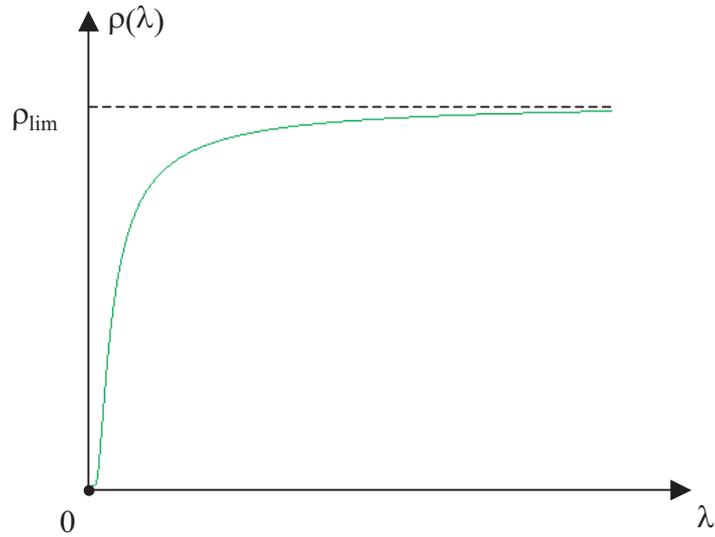
$$\varrho = \frac{\varphi_\lambda(\lambda, T_P) d\lambda}{\varphi_\lambda(\lambda, T_E) d\lambda} \frac{4\pi R_P^2}{4\pi R_E^2} \text{ or } \lambda_P T_P = \lambda_E T_E = \gamma \frac{hc_0}{k_B}$$

$$\text{soit } \varrho = \frac{e^{\frac{\lambda_E}{\gamma\lambda}} - 1}{e^{\frac{\lambda_P}{\gamma\lambda}} - 1} \left(\frac{R_P}{R_E}\right)^2$$

2.3.2 si  $\lambda \rightarrow 0$  alors  $\varrho \rightarrow e^{\frac{\lambda_E - \lambda_P}{\gamma\lambda}} \left(\frac{R_P}{R_E}\right)^2 \rightarrow 0^+$  car  $\lambda_P > \lambda_E$  puisque  $T_E > T_P$

si  $\lambda \rightarrow \infty$  alors  $\varrho \rightarrow \varrho^- = \frac{\lambda_E}{\lambda_P} \left(\frac{R_P}{R_E}\right)^2$  (au vois de 0  $e^x \sim 1 + x$ )

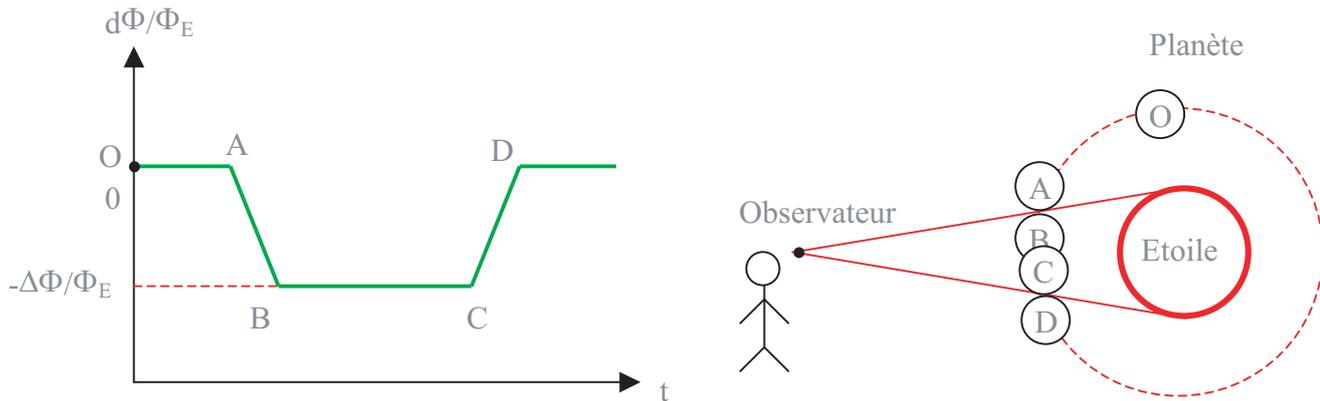
A.N :  $\varrho_{\ell}(terre - soleil) = 3.6 \cdot 10^{-6}$  de l'espace la terre sera nettement moins visible!



**2.3.3** domaine des grandes longueurs d'onde (infra-rouge)

*3<sup>ème</sup>* partie :  
**Détection par la méthode indirecte des transits**

**3.1 :**



**3.2**

**3.2.1** entre les points *O* et *A* le flux observé sera  $\Phi = \Phi_E + \Phi_P$  mais entre les points *B* et *C* le flux observé sera  $\Phi' = \frac{\Phi_E}{\pi R_E^2} (\pi R_E^2 - \pi R_P^2) + \Phi_P$

donc  $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = \frac{\Phi' - \Phi}{\Phi_E} = -\left(\frac{R_P}{R_E}\right)^2$

**3.2.2** A.N :

planète Jovienne  $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = -10^{-2}$

planète Tellurique  $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E} = -8.3 \cdot 10^{-5}$

la planète Jovienne est plus facile à détecter qu'une planète Tellurique!

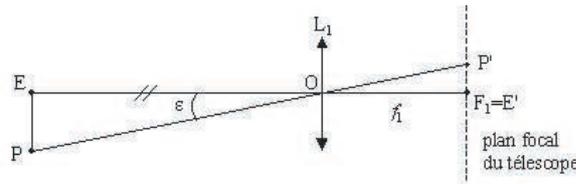
**3.2.3**  $\frac{R_P}{R_E} = \sqrt{\left|\frac{\Delta\Phi}{\Phi_E}\right|} = \sqrt{10^{-3}} = 3.2 \cdot 10^{-2}$

*4<sup>ème</sup>* partie :  
**Observation directe**

## 4.1 Coronographe de Lyot

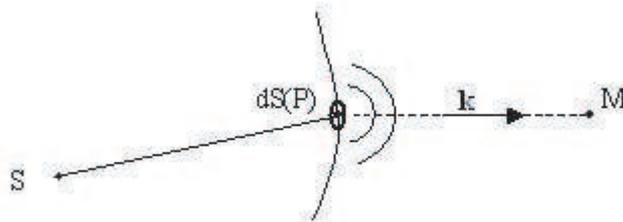
### 4.1.1 télescope Hubble

4.1.2 le système  $E, P$  étant presque à l'infini, les images seront dans le plan focal du télescope



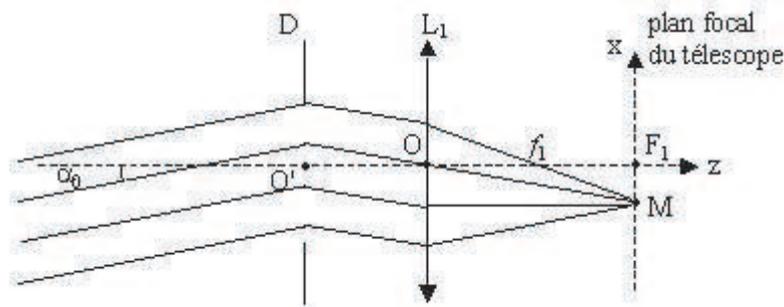
4.1.3 la lumière se propage de proche en proche, chaque point  $P$  atteint par elle se comporte comme une source secondaire et émet des ondellettes sphériques d'amplitude

$$d\underline{a}(M, t) = \underline{a}_i(P^-) \underline{t}(P) \frac{e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{P}\vec{M})}}{PM} dS(P)$$



avec  $\underline{a}_i(P^-)$  est l'amplitude du signal lumineux juste avant  $P$  et  $\underline{t}(P)$  la transmittance de la surface diffractante en  $P$

4.1.4 le schéma est :



4.1.4.1 on a  $I(x) = |\underline{a}|^2$  or à une dimension  $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} e^{\frac{2\pi j}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{O}'P} \frac{dx'}{D}$  avec

$$\vec{u}_i = \cos \alpha_0 \vec{z} + \sin \alpha_0 \vec{x}$$

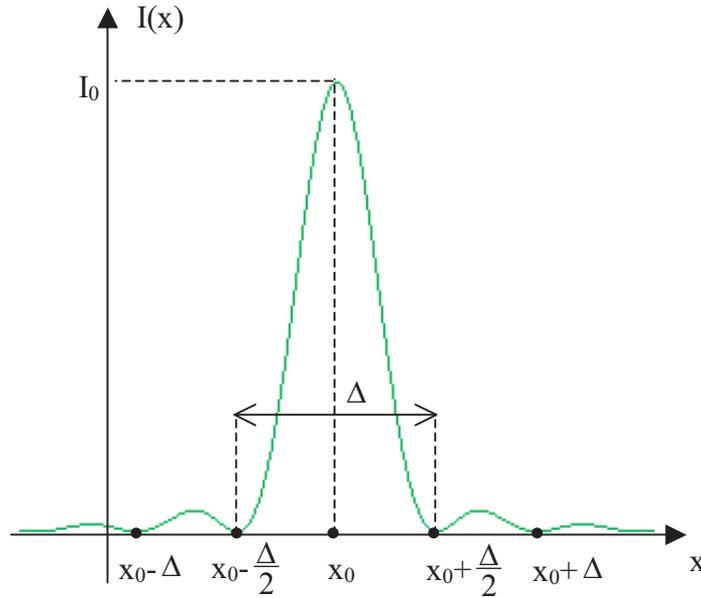
$$\vec{u} \approx \frac{\vec{O}\vec{M}}{f_1} = \frac{f_1 \vec{z} + x \vec{x}}{f_1}$$

$$\vec{O}'P = x' \vec{x}$$

il vient  $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} e^{\frac{2\pi j}{\lambda f_1} (x - f_1 \sin \alpha_0) x'} \frac{dx'}{D} = a_0 \text{sinc} \left[ \frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_0) \right]$  avec  $x_0 = f_1 \sin \alpha_0$

$$\text{soit } I(x) = I_0 \text{sinc}^2 \left[ \frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_0) \right]$$

4.1.4.2 la largeur de la tache centrale de diffraction est  $\Delta = 2 \frac{\lambda}{D} f_1$



#### 4.1.5

4.1.5.1 la lumière des deux étoiles est incohérente donc  $I(x) = I_P(x) + I_E(x)$

or  $\alpha_{0E} = 0$  et  $\alpha_{0P} \approx \tan \alpha_{0P} = \frac{EP}{TE} = 2.85 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$

soit  $I(x) = I_0^E \text{sinc}^2\left[\frac{\pi D}{\lambda f_1} x\right] + I_0^P \text{sinc}^2\left[\frac{\pi D}{\lambda f_1} (x - x_p)\right]$

avec  $x_p = \sin \alpha_{0P} f_1 \approx \alpha_{0P} f_1$  correspondant à la position de l'image géométrique de P !

4.1.5.2 la tache centrale de l'étoile est centrée sur  $x = 0$  pour cacher les deux lobes ainsi que la tache centrale de l'étoile on doit prendre  $\ell_0 = \frac{\Delta}{2} + \Delta + \frac{\Delta}{2} = 4 \frac{\lambda}{D} f_1 \implies \ell_0 = 4 \cdot 10^{-7} f_1$

or la tache centrale de la planète est centrée sur  $x = x_p = 2.85 \cdot 10^{-7} f_1 > \frac{\ell_0}{2}$  donc la tache centrale de la planète est en dehors de la partie masquée

4.1.5.3 le rapport des intensités au niveau de l'image géométrique de la planète et le premier lobe

non caché est  $\varrho = \frac{5 \cdot 10^{-6} I_0^P}{1.6 \cdot 10^{-2} I_0^E} = 3 \cdot 10^{-4}$

malgré le cache déposé, la planète reste noyée dans la lumière diffractée de l'étoile

#### 4.2 Étude d'une pupille apodisée

4.2.1  $\underline{a}(x) = a_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} t(x') e^{\frac{2\pi j}{\lambda f_1} (x-x_0)x'} \frac{dx'}{D}$  avec  $x_0 = f_1 \sin \alpha_0$

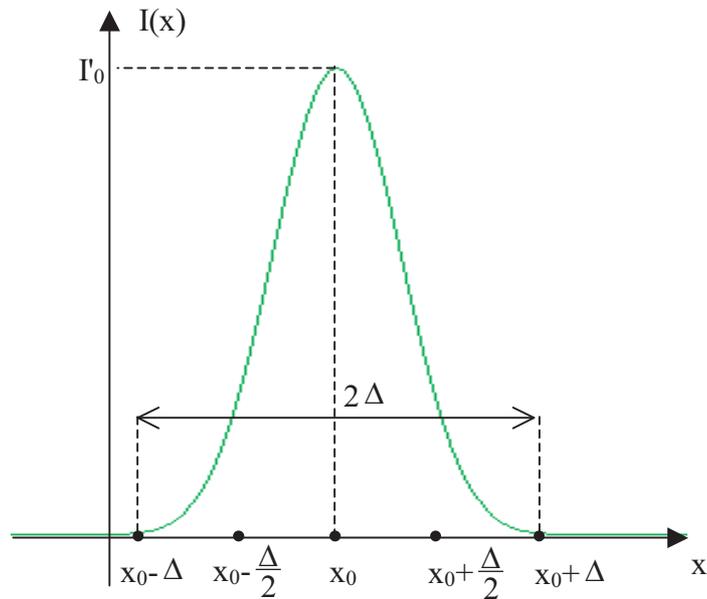
et  $t(x') = \cos^2\left(\frac{\pi x'}{D}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x'}{D} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi j x'}{D}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi j x'}{D}}$

donc après calcul, il vient  $\underline{a}(x) = \frac{a_0}{2} \frac{\text{sinc}(\pi X)}{1 - X^2}$  avec  $X = \frac{D}{\lambda f_1} (x - x_0)$  enfin

$$I(x) = I_0' \frac{\text{sinc}^2(\pi X)}{(1 - X^2)^2}$$

où  $I_0' = \frac{I_0}{4}$

4.2.2 on a  $I(X = 0) = I_0'$  et par développement limité  $I(X = 1) = \frac{I_0'}{4}$  et  $I(X) = 0$  pour  $X \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$



4.2.3 la largeur de la tache centrale est  $\Delta' = 2\Delta = 4\frac{\lambda}{D}f_1$  , le masque (4) élimine quasiment la lumière des lobes secondaires c'est l'apodisation

#### 4.2.4

4.2.4.1 l'intensité du premier lobe non caché de la lumière issue de E est , d'après le tableau donné ,  $7.1 \times 10^{-4} I_E^0$  , on peut donc dire que la lumière de l'étoile est arrêtée par le cache

4.2.4.2  $\rho' = \frac{5 \cdot 10^{-6} I_E^0}{7.1 \cdot 10^{-4} I_E^0} = 7 \cdot 10^{-3}$  , la lumière de l'étoile est relativement moins gênante avec l'apodisation

4.2.4.3 non , le rapport des intensités est encore très faible

4.2.4.4 changer la transmittance de la pupille du télescope

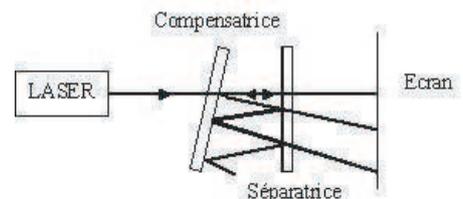
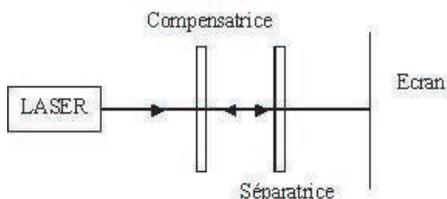
### 4.3 Apodisation à l'aide de l'interféromètre de Michelson

#### 4.3.1

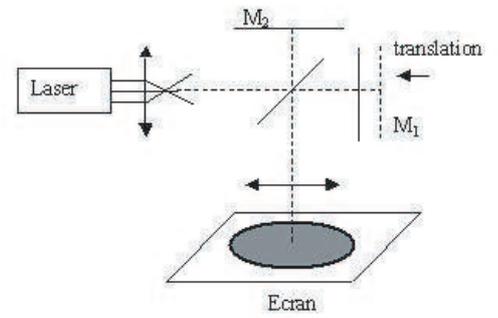
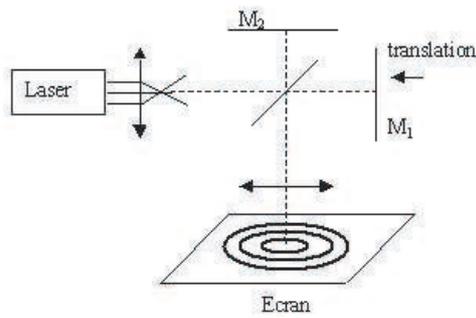
4.3.1.1 Par une deposition d'une couche mince (micrométrique) métallique (d'argent par exemple) sous vide.

4.3.1.2 compenser la différence de marche due à l'épaisseur non nulle de la lame séparatrice

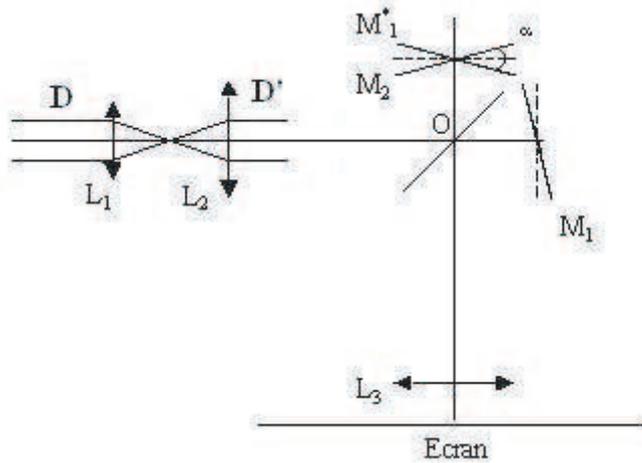
4.3.1.3 on éclaire l'ensemble  $\{C + S_p\}$  à l'aide d'un faisceau Laser si la compensatrice n'est pas parallèle à la séparatrice , on observe plusieurs taches sur l'écran , on incline alors C jusqu'à obtenir une seule tache ,  $S_p$  et C sont alors parallèles!



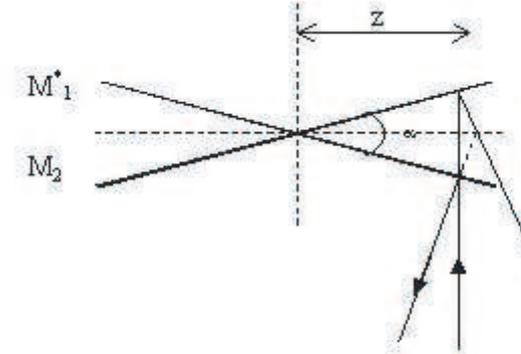
4.3.1.4 on translate le miroir  $M_1$  suivant  $Oz$  , les anneaux défilent du centre jusqu'à obtenir une intensité uniforme sur l'écran c'est la position du contact optique



### 4.3.2



#### 4.3.2.1 :



4.3.2.2 on a  $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda})$  or  $\delta = 2e \approx 2\alpha z$  soit  $I = \frac{I_0}{2}(1 + \cos \frac{4\pi\alpha z}{\lambda}) = I_0 \cos^2 \frac{2\pi\alpha z}{\lambda}$  donc  $\beta = \frac{2\pi\alpha}{\lambda}$

4.3.2.3  $I = |a|^2 \implies a(z) = a_0 \cos \beta z$  est une expression possible de l'amplitude de l'onde

4.3.2.4 à la sortie de  $L_2$  puis après réflexion sur  $S_p$  l'amplitude de onde est  $a_0$

avant  $L_3$  l'amplitude est  $a_0 \cos \beta z$  donc tout se passe comme si la transmittance de la fente  $F$  est  $t(z) = \cos \beta z$

4.3.2.5 Tallis  $\frac{D}{D'} = \frac{f_{i1}}{f_{i2}}$  on a  $\cos \beta \frac{D'}{2} = 0$  pour la première fois càd  $\beta \frac{D'}{2} = \frac{\pi}{2} \implies \alpha_0 = \frac{\lambda f_{i1}}{2D f_{i2}}$

4.3.2.6 l'image  $F_1$  par le Michelson (Miroirs non tournés) et  $L_3$  est  $F_3$  le foyer image de  $L_3$

### 4.3.3 qualitativement

4.3.3.1 non , car on aura une invariance par rotation autour de l'axe optique.

Il faut remplacer les miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$  par des miroirs sphériques pour obtenir un coin d'air invariant par rotation autour de  $Oz$

4.3.3.2 répéter l'opération à l'aide de N dispositif de Michelson (le point  $F_3$  prend le rôle de  $F_1$ ).

**fin du corrigé**